# 保险资金最优投资策略

## ——基于最小破产概率

奚晓军

(厦门大学 经济学院,福建 厦门 361005)

【摘　要】 文章主要研究保险公司的最优投资策略，利用保费收取与保费赔付之间的时滞，研究保险资金的投资。在考虑承保风险的基础上,建立了有承保风险影响的保险资金投资模型。假设保险公司以固定的毛费率收取保险费,用复合泊松过程来描述总的索赔数,保险公司可以投资无风险资产和风险资产,应用最优控制原理求解 HJB 方程得到最优投资策略。结论对于指导保险公司进行资金投资有重要的理论和实践意义。也研究了当各种因素(例如股票的波动率)改变时,对最优投资策略的影响。

【关 键 词】 最优投资策略;承保收益;承保风险;投资收益
【中图分类号】F840.32　【文献标识码】A　【文章编号】1004-2768(2013)10-0063-04

## 一、问题提出

保险投资就是保险公司将保费盈余用于证券投资,以获取更多的收益。现在国际保险业竞争日趋激烈。各保险公司之间为了争夺客户,在竞争中求生存,不得不以各种优惠条件承保。其中之一就是降低保费,有时甚至低于赔付,造成有些保险公司收取的保费入不敷出,出现亏损,只得依靠对保险资金的直接运用所获得的利润来弥补保费低廉所造成的亏损(见表 1)。从表 1 可以看出，美国等六国产险公司的承保业务在 1975—1992 年几乎都是亏损,完全是由于投资业的盈利才推动了公司的发展。

表 1　1975—1992 年六国财产保险公司经营状况　单位:%

| | 美国 | 日本 | 德国 | 法国 | 英国 | 瑞士 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 承保盈亏率 | –8.20 | 0.33 | 0.51 | –11.62 | –8.72 | –8.48 |
| 投资收益率 | 14.44 | 8.48 | 8.72 | 13.01 | 13.29 | 11.55 |
| 利润边际 | 5.80 | 4.56 | 4.99 | 1.38 | 4.57 | 3.07 |

我国从 1980 年开始恢复保险业务以来，主要是依靠承保收益。但是最近几年我国保险市场的竞争日益激烈,产险费率已经市场化,承保业务的利润越来越低,投资业务已经成为保险公司的主要利润增长点，成为保险公司生存和发展的希望。与发达国家保险业相比,我国保险公司在投资方面经验非常欠缺,投资渠道狭窄,投资人才缺乏。目前我国保险公司的投资渠道主要有银行存款、债券以及证券投资基金。这些限制一方面可以减少保险公司面对的风险,但另一方面也造成了大量资金积压的不良状态。另外,金融经济环境的复杂性也增加了保险资金运用的市场风险，如在金融动荡下,2008 年保险资金运用收益率从 2007 年的 12.17%骤降至 1.91%(见图 1)。因此,在保证保险公司具有最小破产概率的条件下,对保险资金进行科学合理的投资,从而有效地分散风险并获得稳定的收益,是保险资金投资中一个非常重要的研究课题。

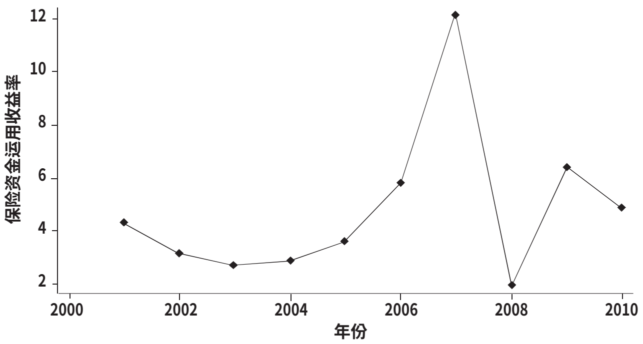


图 1　保险资金运用收益率变化趋势

资料来源:2002—2011 年《中国保险年鉴》

Browne 最早以保险公司为例研究了扩散市场的保险投资问题。Hipp,Plum 按照最小化破产概率准则研究了保险资金的最优投资问题。Liu,Yang 在 Hipp,Plum 的基础上,引入无风险证券,获得保险人的最优投资模型的数值解。

本文利用保费收取和保费赔付间的时滞,建立了考虑承保风险的保险资金投资模型，并通过保险公司破产概率最小化，研究保险资金投资的最优比例。这对保险公司进行有效的保险资金投资有重要的理论和实践意义。

## 二、模型的建立

为了使模型简化,把资本市场上的证券简化为两种,一种为债券,它的价格过程满足微分方程：

$$dB_t=r_0B_tdt,\ t\geq 0 \tag{1}$$

其中,$r_0>0$ 为无风险利率;另一种证券是股票,它的价格过程 $P_t$ 服从几何布朗运动,即满足随机微分方程：

$$dP_t=\mu P_tdt+\sigma P_tdW_t,\ t\geq 0 \tag{2}$$

【收稿日期】2013-09-01
【作者简介】奚晓军(1978-),男(满族),吉林九台人,厦门大学经济学院博士研究生,研究方向:保险精算。

其中，$\mu$（$\mu\geq0$）为股票瞬时条件期望收益率，$\sigma$（$\sigma>0$）为股票瞬时条件标准差，$W_t$ 为标准布朗运动。与一般投资机构不同，保险公司一般不允许将所有资本金用于投资，因为在投资期一旦发生较大金额索赔，保险公司就会面临破产的风险。理论上在保险公司的投资过程中，公司所能承受的最大损失即为它的总资产 $s$。但在实际操作中，为保证保险公司每年有良好的业绩、在激烈的市场竞争中立于不败之地，它每年所能承受的最大投资不应高于公司的自由准备金。设保险公司初始资本金为 $s$，保险公司为了减少破产的风险，保险公司将初始资本金分为两部分：一部分用于投资，所占比例为 $a$（$0<a<1$），留存部分（$1-a$）$s$ 应对可能到来的索赔。事实上，我国对保险公司直接进入资本市场进行风险投资的投资比例就有一定限制，《关于保险资金股票投资有关问题的通知》明确规定保险公司当年的风险投资比例的上限为其上一年度总资产的 5%。

保险公司的财富过程 $X_t$ 可以认为是由两部分构成：一部分是留存资本金加上收取的保费再减去赔付，记为 $R_t$（$t>0$）。本文假定索赔满足复合泊松过程 $R_t$（$t>0$），则随机过程满足随机微分方程：

$$dR_t=cdt-dS_t, R_0=(1-a)s \tag{3}$$

其中 $c$ 为保险公司单位时间收取的保险，具体来讲是毛费率；$S_t=\sum_{i=1}^{N_t}Y_i$ 为复合泊松过程，$N_t$ 服从参数为 $\lambda$（$\lambda>0$）的泊松过程，表示截止到 $t$ 时的索赔次数，$Y_i$ 为第 $i$ 次的索赔金额，$\{Y_i\}_{i\geq1}$ 满足独立同分布，$c=(1+q)\lambda E(Y_i)$。根据大数原则，保险公司收取的纯保费最后都要赔付出去，所以纯费率 $=\lambda E(Y_i)$，附加费率 $=q\lambda E(Y_i)$，在一般的文献中 $q$ 称为相对安全负载，$q$ 越大，保险公司收取的附加保费越多，表明保险公司破产的可能性越小，也就越安全。

另一部分是投资收益，记为 $M_t$，若记 $A_t$ 为保险公司在 $t$ 时投资在股票市场上的资金额，则有

$$dM_t=A_t\frac{dP_t}{P_t}+(aX_t-A_t)\frac{dB_t}{B_t}, M_0=as \tag{4}$$

保险公司在 $t$ 时的财富过程 $X_t$ 满足随机微分方程：

$$dX_t=dM_t+dR_t, M_0=s \tag{5}$$

将（1）、（2）、（3）、（4）式带入（5）式，可知在 $t$ 时的财富过程 $X_t$ 为一个扩散过程，即满足随机微分方程：

$$dX_t=(\mu-r_0)A_tdt+r_0aX_tdt+\sigma A_tdW_t+cdt-dS_t, X_0=s \tag{6}$$

## 三、最优投资策略

本文使用保险公司存活概率作为目标函数。定义保险公司的破产时间：

$$\tau_s=\inf\{t>0: X_t<0, X_0=s\} \tag{7}$$

当破产时间趋于无穷大时，就意味着保险公司存活，所以保险公司的存活概率：

$$\delta(s)=P\{\tau_s=\infty|X_0=s\} \tag{8}$$

假设存活概率 $\delta(s)$ 是严格单调递增凹函数，当初始资本金越大，保险公司存活概率越大，即 $\delta'(s)>0$，又根据经济学上的边际效用递减律，存活概率应为凹函数，即 $\delta''(s)<0$。本文目的要找到保险资金分配在股票上的金额 $A^*(s)$，使得保险公司的存活概率最大（即破产概率最小），即找到满足如下 HJB 方程的 $A^*(s)$：

$$\max_{0\leq A\leq as}\{\lambda E[\delta(s-Y)-\delta(s)]+\delta'(s)[c+(\mu-r_0)A+r_0as]+0.5\delta''(s)\sigma^2A^2\}=0 \tag{9}$$

对（9）式两边关于 A 求导，可得：

$$A^*(s)=\min\left\{-\frac{\delta'(s)}{\delta''(s)}\eta, as\right\}$$

其中 $\eta=\frac{\mu-r_0}{\sigma^2}$，从上面这个结果来看，保险资金的投资与承保风险有关，也即承保风险对保险资金投资将产生影响。下面分两种情况来讨论 $A^*(s)$：

1.当 $-\frac{\delta'(s)}{\delta''(s)}\eta\geq as$ 时，$A^*(s)=as$

2.当 $-\frac{\delta'(s)}{\delta''(s)}\eta<as$ 时，可得 $A^*(s)=-\frac{\delta'(s)}{\delta''(s)}\eta$，代入（9）式可得：

$$(\mu-r_0)\eta\delta'(s)=2\delta''(s)\{r_0as+c\}\delta'(s)+\lambda E[\delta(s-Y)-\delta(s)]\} \tag{10}$$

当 $s=0$ 时，$A(0)=0$，由（10）式，可得初始条件 $c\delta'(0)=\lambda\delta(0)$，为简化问题，令 $\delta'(0)=1$，可得 $c=\lambda\delta(0)$。为使上式简化，我们假设 $M=(\mu-r_0)\eta$，$\overline{\lambda}=\lambda/M$，$\overline{r}_0=r/M$，$\overline{c}=c/M$，$H(y)=1-F(y)$，$u(s)=\delta'(s)$，其中 $F(y)$ 为 $Y$ 的概率分布函数，经过化简，（10）式变成：

$$-\overline{\lambda}\int_0^s u(s-y)H(y)dy+(\overline{r}_0as+\overline{c})u(s)-\overline{c}H(s)=\frac{1}{2}\frac{[u(s)]^2}{u'(s)} \tag{11}$$

假设个体索赔金额 $Y$ 服从参数为 $k$ 的指数分布，为了简化推导，假设 $k=1$，所以 $H(y)=1-F(y)=e^{-y}$，令 $v(y)=u(y)e^y$，（11）式变为：

$$-\overline{\lambda}\int_0^s v(y)dy+(\overline{r}_0as+\overline{c})v(s)-\overline{c}=\frac{1}{2}\frac{[v(s)]^2}{v(s)'-v(s)} \tag{12}$$

进一步假设 $w(y)=\left[\frac{v(y)}{v(y)-v'(y)}\right]^2$，（12）式变为：

$$-\overline{\lambda}\int_0^s v(y)dy+(\overline{r}_0as+\overline{c})v(s)-\overline{c}=-\frac{1}{2}v(s)\sqrt{w(s)} \tag{13}$$

（13）式两边对 $s$ 求导，两边同时除以 $v(s)$ 可得：

$$w'(s)=-2w(s)-4[(-\overline{\lambda}+\overline{r}_0)+(\overline{r}_0as+\overline{c})-0.5]\sqrt{w(s)}+4(\overline{r}_0as+\overline{c}), w(0)=0 \tag{14}$$

$$A^*(s)=-\eta\sqrt{w(s)} \tag{15}$$

此常微分方程没有解析解存在，使用有限差分法来求解此微分方程数值解，将求得的数值解，代入 $A^*(s)=-\eta\sqrt{w(s)}$ 即可求出投资在股票上的资金额。从表达式可以看出最优投资策略主要决定于投资者的初始财富、保险的收取额、索赔风险、股票市场上的波动率等。

## 四、数值分析

假设证券市场可供投资选择的证券有两种：一种债券，利率为 4%，另外一种为股票，平均收益率为 0.1，方差为 $0.3^2$。保险公司预计今年的索赔到来服从 $\lambda=3$ 的泊松过程，个别索赔额 Y 服从参数为 1 的指数分布，相对安全负载 $q=0.2$，则每年毛费率 $c=3.6$。可得：$w'(s)=-2w(s)-4(0.5s+15.5)\sqrt{w(s)}+2s+360$，$w(0)=0$。采用常微分方程数值解，将求出的数值解代入 $A^*(s)=-\eta\sqrt{w(s)}$，可得 $A^*(s)$ 的数值解。如图 2 所示。

从图 2 可以看出，如果初始资本金 $s$ 很少的时候，就把可以投资的资金都用来投资股票，这表明保险公司为了防止破产，取得更高的收益，而不顾高风险。随着初始资本金 $s$ 逐渐增大，投资在股票上的资金额无论是比例还是绝对量上都逐渐减少。这表明初始资本金越多，保险公司面临的破产风险越小，所以

当自有资本金增大的时候采取保守策略更佳，保险公司宁愿选择购买无风险债券而不持有波动性更大，从而风险性也更大的股票。

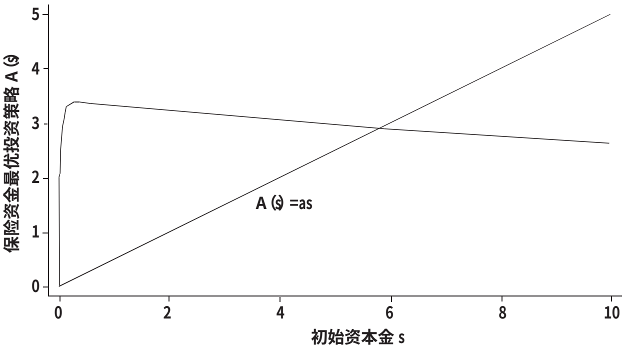


图 2　保险资金最优投资策略

但是要注意的是，由于在股票市场上投资份额有限制，所以在初始资本金很少的时候，在股票市场上的投资份额只有 $A(s)=as$，所以加上限制之后的最优投资策略图如图 3 所示：

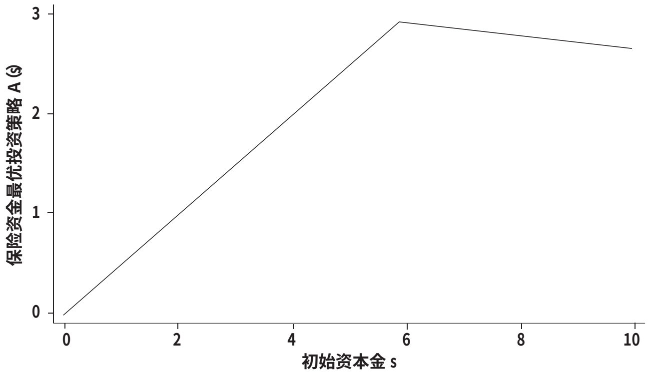


图 3　保险资金最优投资策略（在限制条件下）

## 五、最优投资模型的动态性质

找出保险公司最优投资策略与其决定因素 $r_0$，$\sigma$，$q$，$\lambda$ 之间的关系，以便于保险公司在投资条件变化的情况下更好地调整自己的投资策略。

### （一）无风险利率 $r_0$

从图 4 中可以看出，随着无风险利率 $r_0$ 的增加，在股票上的投资金额明显减少，这个结果与现实是明显符合的，当别的变量不变的时候，无风险利率 $r_0$ 增加时，投资在债券等无风险资产上，可以获得高回报，所以在股票上的投资金额就相应减少，这就是经济学上的替代效应。反之，如果无风险利率降低的时候，保险公司更愿意投资在股票市场上。

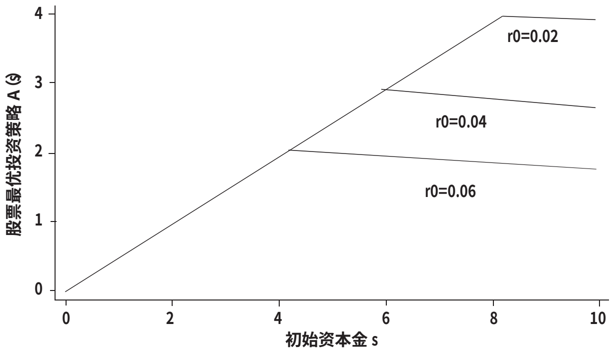


图 4　最优投资策略 A（s）与无风险利率 $r_0$ 的关系

### （二）股票波动率 $\sigma$

从图 5 可以看出，当股票波动率 $\sigma$ 增加时，在股票上的投资金额减少。在某种程度上，波动率 $\sigma$ 是股票风险的一种度量。如果股票价格的波动率增加，而股票价格的预期回报率不变，那么保险公司要面对风险的增大，即“高风险，低收益”。投资在股票上的金额就相应减少，而增加债券的投资。反之，如果保险公司发现股票价格的波动率下降，但是回报率不变，所以就相应增加股票的投资。但是要注意，当初始资本金比较少的时候，投资股票的金额要受到 $as$ 的限制，不能超过这个限制。

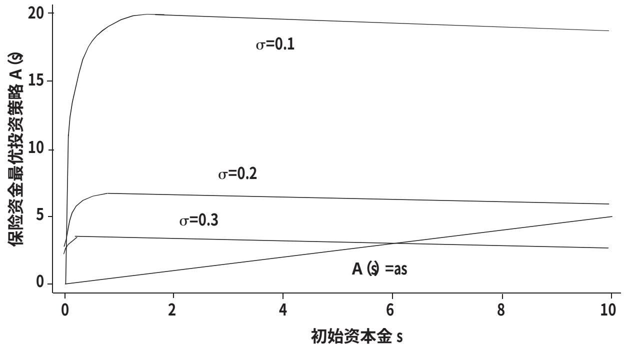


图 5　最优投资策略 A（s）与股票波动率 $\sigma$ 的关系

### （三）相对安全负载 $q$

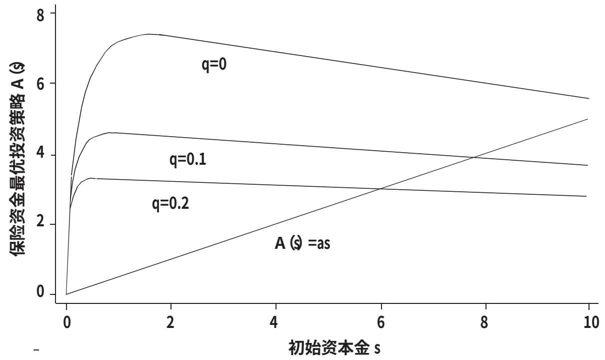


图 6　股票最优投资策略 A（s）与 $q$ 关系

提高相对安全负载系数 $q$，意味着增加了保费的附加费率，但是承保风险没有增加，所以承保收益增加，这意味着投资收益可以少一些，所以投资在股票上的资金就少了很多。要注意到当初始资本金很少的时候，投资在股票上的资金额要受到 $as$ 的限制。

### （四）预期索赔平均数 $\lambda$

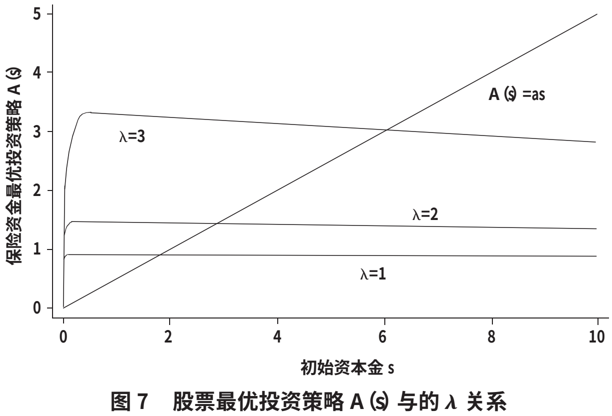


图 7　股票最优投资策略 A（s）与的 $\lambda$ 关系

从图 7 可以看出，当索赔预期 $\lambda$ 增加时，在股票上的投资

增加。由于索赔预期增加，可知相应地也提高了纯费率 $\lambda E(Y)$，这就意味着同时提高了保险公司的破产风险。因此，保险公司一定要投资更多的金额在股票上，来获取更大的投资收益，以此来承受破产风险的提高。要注意当资本金很少的时候，投资在股票上的资金额要受到的限制。

## 六、结论

我国的保险公司，长期以来重承保，轻投资，专门投资人才也比较缺乏，这样就导致了保险公司对资金安全控制没有把握。我国的证券投资基金，除了结构单一、品种不全之外，还存在证券投资基金分散非系统性风险的能力不强及市场时机把握能力较差等问题，我国法律规范所规定的保险资金运用方式种类少而且领域窄。我国保险资金投资面临着十分严峻的挑战。

本文讨论了在连续时间状态下，考虑保险人在基于保险公司破产概率最小化的基础上的保险资金投资问题，给出了保险公司保险资金最优投资比例。这为保险公司在不确定的环境下，利用保费收取与保费赔付的时滞期间，将所收取的保费进行有效投资，从而可增强保险公司的收益，从而增强保险公司的承保与保险赔付能力，增加保险公司的保险市场竞争力。

【参考文献】

[1] Browne S.Optimal investment policies for a firm with a random risk process：Exponential utility and minimizing the probability of ruin[J].Mathematics of Operations Research，1995，20（4）：937-958.

[2] Elliott R. J.，Siu T K.A BSDE approach to a risk-based optimal investment of an insurer[J].Automatica，2011（47）：253-261.

[3] Emms P.，Haberman S.Asymptotic and numerical analysis of the optimal investment strategy for an insurer[J].Insurance：Mathematics and Economics，2007（40）：113-134.

[4] Hipp C.，Plum M.Optimal investment for insurer[J].Insurance：Mathematics and Economics，2000（27）：215-228.

[5] Liu C.S.，Yang H.L.Optimal investment for an insurer to minimize its probability of ruin[J].North American Actuarial Journal，2004，8（2）：11-31.

[6] Zeng Y，Li Z F.Optimal time-consistent investment and reinsurance policies for mean-variance insurers[J].Insurance：Mathematics and Economics，2011（49）：145-154.

[7] 郭文旌，胡奇英.不确定终止时间的多阶段最优投资组合[J].管理科学学报，2005（2）.

[8] 郭文旌，李心丹.最优保险投资决策[J].管理科学学报，2009（1）.

[9] 荣喜民，李楠.保险基金的最优投资研究[J].数量经济技术经济研究，2004（10）.

[10] 荣喜民，吴孟钊，刘伯炀.保险投资的最优投资比例研究[J].天津大学学报，2001（2）.

[11] 荣喜民，吴孟钊，刘伯炀.保险基金投资的单位风险收益最优化模型研究[J].管理工程学报，2011（2）.

[12] 粟芳.中国非寿险保险公司的偿付能力研究[M].上海：复旦大学出版社，2002.

（责任编辑：X　校对：F）

---

（上接第 44 页）将服务业一般纳税人基本税率定在 13%，对个别行业按 17%税率征税，或将基本税率定在 15%，有利于达到在财政收入基本稳定前提下完成服务业增值税制改革。

潘文轩（2012）利用投入产出表数据分析并测算增值税扩围改革影响各服务业行业流转税负变动的净效应，结果发现：不同服务业行业的税负变化情况差异较大，商务服务业等大多数行业的税负将减轻，但租赁业等部分行业的税负会加重，税改后的增值税税率水平选择与中间投入比率是影响服务业行业税负变动的主要因素。

张明（2012）针对营改增试点方案及其后可能的扩展测算了营改增的减税规模。不同于胡怡建、李天祥（2011）的是，张明没有考虑流转税改革对所得税的影响，对应税销售收入的调整也很不一样。具体而言：（1）扣除了居民消费支出中的非货币和非市场活动的的部分；（2）扣除部分投入产出部门的政府消费支出；（3）包含了固定资本形成总额；（4）对非工业部门产出的不含税处理采用直接扣除生产税净额的办法；（5）在对进口和出口的处理上，以往通常的做法是将进口纳入增值税税基，而将出口排除在外，而张明（2012）在分析了我国出口退税计算方法和进口商品的用途后，将进口和出口都纳入到增值税的税基中。

其估算结果显示，相对于改革前增值税和营业税理论税收收入规模，减税幅度并不大，约为 4.62%，因此，营改增对财政收入规模的影响在财政可承受范围之内。

【参考文献】

[1] Cnossen.Key Questions in Considering a Value-Added Tax for Central and Eastern European Countries[J].Staff Papers，International Monetary Fund（Washington），1992，39（7）：211-55.

[2] Department of Treasury in the U.S.，Tax Reform for Fairness，Simplicity，and Economic Growth，Volume 3，Value-Added Tax.The Treasury Department Report to the President，1984.

[3] C.A.Aguirre，P.Shome.The Mexican Value-Added Tax：Methodology for Calculating the Base[J].National Tax Journal，1988（12）.

[4] G.A.Mackenzie.Estimating the Base of the Value-Added Tax（VAT）in Developing Countries：The Problem of Exemptions.IMF WORKING PAPER，WP9121，1991.

[5] Howell H.Zee，Value-Added Tax.In：Parthasarathi Shome（eds）.Tax Policy Handbook，Fiscal Affairs Department，IMF，Washington D.C.，1995.

[6] Anthony J.Pellechio，Catharine B.Hill.Equivalence of the Production and Consumption Methods of Calculating the Value-Added Tax Base：Application in Zambia.IMF，1996.

[7] Jenkins Glenn P.，Chun-Yan Kuo，Gangadhar P.Shukla.Tax Analysis and Revenue Forecasting-Issues and Techniques[M].Cambridge，Massachusetts：Harvard Institute for International Development，Harvard University，2000.

[8] Tuan Minh Le，Estimating the VAT Base：Method and Application[J].Tax Notes International，2007（4）.

[9] 杨元伟.关于税收收入能力的估算体系（下）[J].中国税务，1996（11）：12-15.

[10] 谭荣华，梁季.我国增值税收入能力的估测[J].涉外税务，2005（1）：8-14.

[11] 包伟苓.上海市增值税收入能力估算初探[J].上海财税，2000（7）：10-13.

[12] 姜明耀.增值税“扩围”改革对行业税负的影响——基于投入产出表的分析[J].中央财经大学学报，2011（2）.

[13] 胡怡建，李天祥.增值税扩围改革的财政收入影响分析——基于投入产出表的模拟估算[J].财政研究，2011（9）：18-22.

[14] 潘文轩.增值税扩围改革有助于减轻服务业税负吗？——基于投入产出表的分析[J].经济与管理，2012（2）：51-54.

[15] 张明.营业税改征增值税的财政影响分析[D].厦门大学经济学院硕士学位论文，2012.

（责任编辑：X　校对：F）